確率 1 ってむずかしいなぁ！

鎌田 凪平（仙台城南高等学校）

1　はじめに

数学のジャンルの中で唯一身近な現実世界の話題で作題されるのが確率である。それは場合の数が 3 だとじゃんけん，6 はさいころ，2 は硬貨など身近な物にたとえやすいからと思われる。だが，それゆえに独特の解釈が必要な部分もあるように感じている。その 1 つとして確率 1 について考えてみたい。

2　『確率 1 』は仮想の試行

次の問題を考える。

問題 1

1 から 6 までの数字が書かれた球が袋に入っていて，その袋から球を 1 個ずつ順に，戻さず 3 個取り出し，その数字を順に記録したとき，その数字の中に 1 が入っている確率を求める。どの球も取り出される確率は同様に確からしいとする。

1 回目に 1 が出る確率は $\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 1$，2 回目に 1 が出る確率は $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{1}{6}$，3 回目に 1 が出る確率は $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$ であるから，求める確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ① である。（上の式中の 1 はどの球が出てもよいからであり，この 1 は今問題にしていない。）

さて，この試行において，順に取り出し記録した数字の列は 1 から 6 までの数字の中から 3 個取り出し並べて作る数字の列と同じであるから，同様に確からしい ${}_6\mathrm{P}_3$ 通りある。つまり，「取り出し見る」は「一列に並べる」と同値である。したがって，並べ方で確率を求めると，3 個の数字の列に 1 を含む並べ方は，他の 2 つの数字を選び (${}_5\mathrm{C}_2$ 通り)，その 3 個の数字を並べるから ${}_5\mathrm{C}_2\cdot 3!$ 通りあり，確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot 3!}{{}_6\mathrm{P}_3}=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ② である。

ここで，問題 1 を次のように変更したらどうだろう？

問題 1'

1 から 6 までの数字が書かれた球が袋に入っていて，その袋から球を 1 個ずつ順に，戻さず **6 個全部**取り出し，その数字を順に記録したとき，その数字の 3 番目までの中に 1 が入っている確率を求める。どの球も取り出される確率は同様に確からしいとする。

並べ方で考えると，② の分子において 4 個目からの並べ方 3! を掛けたものであるから，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot 3!\cdot 3!}{6!}=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot 3!\cdot 3!}{{}_6\mathrm{P}_3\cdot 3!}=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot 3!}{{}_6\mathrm{P}_3}\cdot\mathbf{1}=\frac{1}{2}\ \cdots\ ③$$

となり，同じ結果であることが分かる。

逆に言うと，問題 1 のように 3 個取り出す試行において，4 個目以降は確率 1 と考え全部取り出すものとして処理してもよいことを意味している。このとき，**確率 1 は，実際には行っていない 4 個目からの取り出し全てを行った場合の仮想の試行の確率を表している**と考えてもよい。

ここで，よく考えてみたいのだが，実は 3 個で取り出しをやめたと言っても，そもそも最初から**実際には取り出しをやってはいないのであって頭の中で考えているだけ**なのである。**問題を解くという作業は，頭の中で思考実験を行っているにすぎない**のである。3 回でやめるというのは，頭の中の思考において 4 回目以上を考えるのをやめただけで，6 回目まで続いている樹形図の 3 回目までを見ているだけなのだと考えることができる。だから，結局 6 個全部取り出す計算と一致するのである。

以上をふまえ，私はこう理解する。（多分，ほとんどの方々にとっては自明のことなのかもしれませんが…）確率の問題は現実世界の事象に即して作題されるから，「やる」のと「やらない」は大きな違いに思えるが，実はどうでもよいことなのである。どういうことかと言うと，ある問題を**考えたとき**，それをやるやらない（途中でやめるやめないも）に関係なく**全樹形図は存在する**のであって，物理的な問題は別にして全て紙に書き出せるのである。答えを求める作業というのは，問題を途中のどこで終了と設定しようがしまいが，その紙にある最後まで続く樹形図の経路を数える計算を行っているのである。

もし，実際に試行を行ったとすると，この樹形図のどれかが選ばれ，試行が終了するまで樹上をトレースしているのである。この全樹形図が描かれた「紙」は，あたかも「天網恢恢疎にして漏らさず。」の天の網のようだ。

※ 尚，この問題を 6 個全部の並べ方の問題とみなした場合，1 以外の他の球は無視し，1 がどこにあるかだけに注目して考えれば，どこにある確率も同様に確からしく $\dfrac{1}{6}$ であるから，半分より左（つまり 3 回目まで）にある確率は当然 $\dfrac{1}{2}$ となる。

もう 1 題考えてみよう。

問題 2

A，B，C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B との間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または，4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1) A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。

（2001 北海道大 ／設問一部省略）

勝者を記すことにして樹形図をかくと，図 1 のようになる。線を 1 本右にたどると勝って次の勝負に参加することになるから，確率は $\times\dfrac{1}{2}$ となる。図より，A が 2 連勝するのは①の 1 回目と 2 回目の 2 連勝の確率 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と，②の 3 回目と 4 回目の 2 連勝の確率 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ だから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}\ \cdots\ ③$$

である。

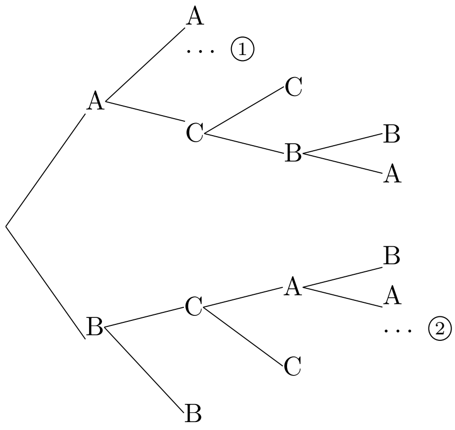

図 1

さて，ここで，③の $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ は 2 回勝負した場合と 4 回勝負した場合の確率であるが，そもそも 4 回の勝負を考えるときに，2 回で終了とはどう考えればいいのであろうか？

確率の定義である $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}$ (U は全事象, A はある事象) において $n(U)$ が異なりはしないのだろうか？

③の計算の

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

において，$\dfrac{1}{4}$ を $\dfrac{4}{16}$ に直す計算は

$$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{4}\cdot\mathbf{1}$$

であるから，2 回目で終了する確率 $\dfrac{1}{4}$ は，その後も続けたと考えると（仮想），$\dfrac{1}{4}\cdot\mathbf{1}$ より，3 回目以降の確率が 1 なのだと考えることができる。このとき，全事象は 4 回で終了した場合と同様，16 なのである。

ここでも，確率 1 は仮想の試行（4 回までの樹形図を数えた）の確率を表すのである。

実際，2 回目で勝負が終了した後の樹形図を書くと図 2 のようになり，確かに全部で 16 通りあることが分かる。

※ もちろん，この樹形図も 4 回目で見るのをやめただけであって，10 回まで考えれば 10 回分存在しているのであって，n 回でも，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ でも存在しているのである。

それは，あたかも，座標平面（空間でも）を考えるときに，曲線（や曲面）を，定義域の範囲しか見ていないが，曲線（や曲面）はどこまでも存在しているのと同じことである。

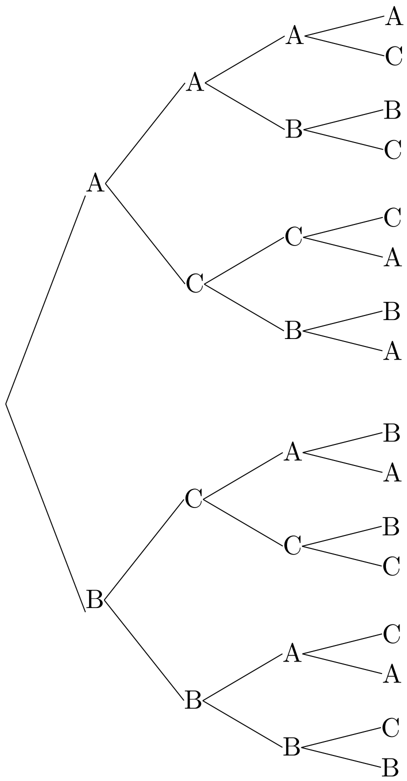

図 2

3　意味がわからない『確率 1』！

問題 3

5 回に 1 回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が，正月に A，B，C 3 軒を順に年始回りをして家に帰ったとき，帽子を忘れてきたことに気がついた。2 番目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。

（1976 早稲田大）

代表的な解答を 2 つ紹介する。

解答 1

帽子を忘れるという事象を X，A に忘れるという事象を A，B に忘れるという事象を B，C に忘れるという事象を C とする。事象 A, B, C はそれぞれ互いに排反事象である。

条件付き確率の公式から，

$$P(X\cap B)=P(X)\cdot P_X(B)\ \Leftrightarrow\ P_X(B)=\frac{P(X\cap B)}{P(X)}$$

である。

A, B, C の否定（忘れない）をそれぞれ $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ とすると，$X\cap B=\overline{A}\cap B$ だから，

$$P(X\cap B)=P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}\cdots ①$$

である。

一方，$X=A\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$ であるから，

$$P(X)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{61}{125}\ \cdots ②$$

である。

よって，

$$P_X(B)=\frac{P(X\cap B)}{P(X)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$

である。

解答 2

$P(X)$ の求め方が解答 1 と異なる。

$X=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}$ だから

$$P(X)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{61}{125}\ \cdots ③$$

さて，解答 1 でハテナ？と思うところがある。まず①，②はこうでもある。

$$P(X\cap B)=P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}=\frac{4}{25}\cdots ①'$$

$$P(X)=\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{61}{125}\ \cdots ②'$$

新たに記した **1** は忘れた後の確率が 1 だということである。

つまり，K 君は 3 軒 A，B，C を全部回ったのだが，A で帽子を忘れたときや，B で帽子を忘れたときにはその次の家以降では確率 1 だということなのである。これってどういうことなのだろう？

例えば，①' は A で忘れずに B で忘れた場合だが，C ではどう考えればいいのか？もし B で忘れてしまったらもう帽子はないのでは？

K 君が帽子を無尽蔵に持ち歩いていて，毎回忘れる確率が $\dfrac{1}{5}$ だというのなら理解できる。B で忘れた後でも，C では忘れても忘れなくてもよいのだから。でも，問題文の意味を考えて（家に帰ったら忘れたことに気がついたと言っている），常識的に判断すると，そういう意味ではないのは明らかだ。

疑問は一旦残しておいて，次に解答 2 を考えてみる。簡略のため，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ を $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$ と表すことにする。

余事象で計算していて，一見上記の矛盾は回避しているように思えるが，全てを書き出して考えてみる。

バーの個数で場合分けすると，

	パターン	確率
（ア）バー 3 個	$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$
（イ）バー 2 個	$A\ \overline{B}\ \overline{C},\quad \overline{A}\ B\ \overline{C},\quad \overline{A}\ \overline{B}\ C$	$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot 3=\frac{48}{125}$
（ウ）バー 1 個	$A\ B\ \overline{C},\quad A\ \overline{B}\ C,\quad \overline{A}\ B\ C$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{12}{125}$
（エ）バー 0 個	$A\ B\ C$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

表 1

である。

（イ）〜（エ）の合計 $\dfrac{48}{125}+\dfrac{12}{125}+\dfrac{1}{125}=\dfrac{61}{125}$ が，解答 2 ③の

$$1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{61}{125}$$

の中身である。

ここで解答 1 との関係を見てみよう。②' は

$$P(X)=P(A)+P(\overline{A}\ B)+P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)=\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{61}{125}\ \cdots②'$$

と表せる。

ここで，第 1 項 $P(A)$ を表 1 のパターンを用いて表すと,（イ）の $A\ \overline{B}\ \overline{C}$ と（ウ）の $A\ B\ \overline{C}$ と $A\ \overline{B}\ C$ と（エ）の $A\ B\ C$ の和であり，

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\ \overline{B}\ \overline{C})+P(A\ B\ \overline{C})+P(A\ \overline{B}\ C)+P(A\ B\ C)\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3\\&=\frac{25}{125}\ \cdots④\end{aligned}$$

である。これが，上の②''の $\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}$ の意味を，表 1 のパターンで説明したものであり，
$\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{5}=\frac{25}{125}$ となっているのである。

同様に，第 2 項 $P(\overline{A}\ B)$ は表 1（イ）の $\overline{A}\ B\ \overline{C}$ と（ウ）の $\overline{A}\ B\ C$ の和であり，

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\ B)&=P(\overline{A}\ B\ \overline{C})+P(\overline{A}\ B\ C)\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5}\\&=\frac{20}{125}\ \cdots ⑤\end{aligned}$$

である。$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\mathbf{1}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5}=\frac{20}{125}$ なのである。

最後に，第 3 項 $P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)$ は表 1（イ）の $\overline{A}\ \overline{B}\ C$ であり，

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\ \overline{B}\ C)&=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2\\&=\frac{16}{125}\ \cdots ⑥\end{aligned}$$

である。$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$ である。

以上，解答 1 の②の意味を，解答 2 のパターンを用いて表現したものが，④，⑤，⑥となる。

では，例えば，④での $P(A\ \overline{B}\ \overline{C})$，$P(A\ B\ \overline{C})$，$P(A\ \overline{B}\ C)$，$P(A\ B\ C)$ の意味ってなんだろう？

$P(A\ \overline{B}\ \overline{C})$ は A で忘れて，B で忘れず，C で忘れない確率である。A で忘れたら，B，C で帽子がないのに忘れるも忘れないもあるのだろうか？

$P(A\ B\ \overline{C})$ は A で忘れ，B でも忘れ，C で忘れない確率である。理解不能。

$P(A\ \overline{B}\ C)$ は A で忘れ，B で忘れず，C で忘れる確率である。もはや意味不明。

$P(A\ B\ C)$ は A で忘れ，B でも忘れ，C でも忘れる確率である。K 君が 3 人いるのだろうか？

解答 1 での疑問に戻ろう。結局，解答 1 での忘れた後の確率 1 というのは，表 1 との対応で確認できるとおり，その後は忘れても忘れなくても構わない部分を表している。ということは，やはり，適切な解釈は，帽子を無尽蔵に持っていて，何回でも忘れることができるである。

繰り返しになるが，そうなると「家に帰ったら忘れたことに気がついた」は，私には理解できないのだ。

この矛盾から逃れる方法は，実は問題 2 と同じように**操作を終了すること**である。つまり，「帽子を忘れたら，その家を出たときに忘れたことに気づくが，戻らず年始をやめ家に帰った」とすればよいのである。忘れた後の確率 1 は仮想の試行の確率になるのである。それに伴い，問題文も「(3 軒全部回って）帽子を忘れてきたことに気がついた。…」ではなく，「帽子を忘れて家に帰ったとき 2 番目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。」に変更すればよいのである。この提案はいかがなものだろうか？

「確率」は，身近な出来事に例えうる唯一のジャンルであるからこそ，ありえない設定や混乱を招く作題は避けてほしいと思うのだ。

そもそも，「5 回に 1 回帽子を忘れる」？などという，本来確率で論じるべきでない人間の行動に確率を当てはめるという作題にも個人的には嫌悪感があるのだが（5 回に 1 回問題に正解するや，5 回に 1 回試合に勝つの類も同様），残念ながら，この問題 3 は何十年と参考書や問題集に取り上げられている。例えば，私の愛蔵本である『大学への数学（解法の探求・確率）』[1] では「出題さ

れてからずいぶんたちますが，原因の確率の傑作問題として，今もなお光輝いています」と絶賛されているし,『チャート式 基礎からの 確率・統計』[2] でも例題に採用されている。『大学への確率・統計』[3] では，少し改題しているがほぼそのままで採用されている。新しいところでは，教科書傍用問題集『4 STEP 数学 I ＋ A』[4] にも採用されている。受験数学界では秀逸な問題として認知されているいうことだ。これだけ圧倒されると，結局，私が確率をわかっていないんだいうことを思い知らされ，自分の才能のなさにほとほと嫌気がさすのである。

4　あとがき

普段，確率の問題でどこかしっくりこないなぁと感じているところを洗いなおしてみたら，確率 1 をどう解釈するのかということに帰着した。自分なりには「そういうことか」と折り合いをつけたつもりだったのだが，恥を晒しただけなのかもしれない。

参考文献

[1] 『大学への数学 93 年 10 月号臨時増刊「解法の探求・確率」』（東京出版，1993 年）

[2] 『チャート式 基礎からの 確率・統計』（数研出版，1986 年）

[3] 『大学への確率・統計』（研文書院，1992 年）

[4] 『4 STEP 数学 I ＋ A』（数研出版，2014 年）