「点と直線の距離公式」の導き方について

鎌田 凪平

1　はじめに

教科書の「点と直線の距離公式」の導出方法は，技巧的すぎて何をしたいのかが生徒には分かりづらいと感じる。高校 1・2 年生にはちょっと難しいけれども，かと言って公式として使用する手前，証明を載せざるを得ないというジレンマがよーく伺える。かつて「数学 III」に掲載されていて今は見かけなくなった「ロルの定理」のようにいずれ消えゆく運命なのではと思ってしまう。

そこで，何通りかの方法を考えてみた。高校 1・2 年生程度で理解できる方法を 3 つ（方法 1，方法 2，方法 3），理系の受験生のレベルでスッキリ理解できる方法を 2 つ（方法 4，方法 5）提示する。

2　方法 1（平行移動）

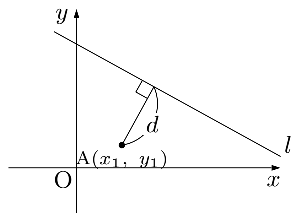

図 1: 元の位置

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と直線 $l: ax+by+c=0$ の距離を d とする。点 A を原点に並行移動させ，直線 l も同じ平行移動をさせる。移動後の直線を l' とすると，図 2 のように d は原点から直線 l' までの距離である。

並行移動量は x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$ であるから，l' の方程式は

$$l': a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。$a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0$ のとき，直線 l' と $x,\ y$ 座標軸との交点をそれぞれ $\mathrm{B}(p,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ q)$ とすると，①に $y=0,\ x=0$ をそれぞれ代入して，

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{a}(ax_1+by_1+c) & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ q = -\dfrac{1}{b}(ax_1+by_1+c) & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

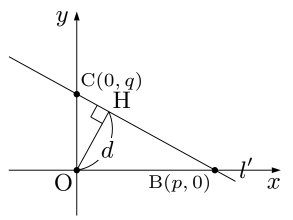

図 2: 平行移動後

である。$ax_1+by_1+c=u$ とおけば，$p=-\dfrac{1}{a}u,\ q=-\dfrac{1}{b}u$ であり，このとき，

$$\mathrm{BC}=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{u^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}=\sqrt{\frac{u^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}$$
$$=\left|\frac{u}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

である。

三角形 OBC の面積を 2 通りで表して，

$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}|p||q| = \frac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\mathrm{BC}$$

より，

$$d = \mathrm{OH} = \frac{|pq|}{\mathrm{BC}} = \frac{\frac{u^2}{|ab|}}{\left|\frac{u}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|u|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

となる。

$a=0$ かつ $b \fallingdotseq 0$ のとき，つまり直線が x 軸に並行なときは $l' : y = -\left(\frac{c}{b}+y_1\right)$ であるから，$d = \left|-\left(\frac{c}{b}+y_1\right)\right| = \left|\frac{c}{b}+y_1\right|$ となる。これは④で $a=0$ としたものであるから，④は $a=0$ かつ $b \fallingdotseq 0$ のときも成り立つ。

同様に，$a \fallingdotseq 0$ かつ $b=0$ のとき，つまり直線が y 軸に並行なときは $l' : x = -\left(\frac{c}{a}+x_1\right)$ であるから，$d = \left|-\left(\frac{c}{a}+x_1\right)\right| = \left|\frac{c}{a}+x_1\right|$ となる。これは④で $b=0$ としたものであるから，④は $a \fallingdotseq 0$ かつ $b=0$ のときも成り立つ。

※［補足］最後に d を算出するときには面積ではなく，

$\triangle\mathrm{OBC} \backsim \triangle\mathrm{HBO}$ を利用して

$$\mathrm{OC} : \mathrm{HO} = \mathrm{CB} : \mathrm{OB} \Leftrightarrow \mathrm{HO}\cdot\mathrm{CB} = \mathrm{OC}\cdot\mathrm{OB}$$

より

$$d = \mathrm{HO} = \frac{\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OB}}{\mathrm{CB}}$$

としてもよい。

3　方法 2（平面図形 1）

$a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0$ のとき，図 3 のように，直線 l が各座標軸と交わっていて，点 A が直線 l の上方にあるとする。点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ から x 軸に下ろした垂線と直線 l との交点を D，x 軸との交点を F とすると，$\mathrm{B}\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$，$\mathrm{D}\left(x_1,\ -\frac{1}{b}(ax_1+c)\right)$，$\mathrm{F}(x_1,\ 0)$ である。

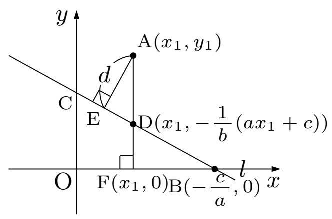

図 3: 点が上方

このとき，

$$\mathrm{BD}^2 = \left(x_1+\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{1}{b^2}(ax_1+c)^2 = \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\left(x_1+\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(a^2+b^2)\left(x_1+\frac{c}{a}\right)^2$$

より

$$\mathrm{BD} = \left|\frac{1}{b}\left(x_1+\frac{c}{a}\right)\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

である。

また，$\mathrm{BF}=\left|x_1+\dfrac{c}{a}\right|$ であり，$\mathrm{AD}=\left|y_1+\dfrac{1}{b}(ax_1+c)\right|=\left|\dfrac{1}{b}(ax_1+by_1+c)\right|$ である。

$\triangle\mathrm{AED}\backsim\triangle\mathrm{BFD}$ であるから，$\mathrm{AE}:\mathrm{BF}=\mathrm{AD}:\mathrm{BD}\Leftrightarrow\mathrm{AE}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BF}\cdot\mathrm{AD}$

よって，

$$d=\mathrm{AE}=\frac{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\left|x_1+\dfrac{c}{a}\right|\cdot\left|\dfrac{1}{b}(ax_1+by_1+c)\right|}{\left|\dfrac{1}{b}\left(x_1+\dfrac{c}{a}\right)\right|\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

$a=0$ かつ $b\fallingdotseq 0$ のとき，つまり直線が x 軸に並行なときは $l:y=-\dfrac{c}{b}$ であるから，$d=\left|y_1+\dfrac{c}{b}\right|$ となる。これは⑤で $a=0$ としたものであるから，⑤は $a=0$ かつ $b\fallingdotseq 0$ のときも成り立つ。

同様に，$a\fallingdotseq 0$ かつ $b=0$ のとき，つまり直線が y 軸に並行なときは $l:x=-\dfrac{c}{a}$ であるから，$d=\left|x_1+\dfrac{c}{a}\right|=\left|\dfrac{c}{a}+x_1\right|$ となる。これは⑤で $b=0$ としたものであるから，⑤は $a\fallingdotseq 0$ かつ $b=0$ のときも成り立つ。

4　方法 3（平面図形 2）

図 4 のように，点 A が直線 l の下方にあり，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り x 軸に並行な直線と直線 l との交点を B，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り y 軸に並行な直線と直線 l との交点を C とする。

このとき，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{a}(by_1+c),\ y_1\right)$，$\mathrm{C}\left(x_1,\ -\dfrac{1}{b}(ax_1+c)\right)$ である。

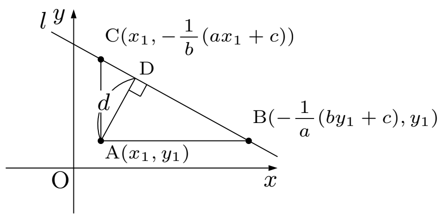

図 4: 点が下方

また，

$$\mathrm{AB}=\left|x_1+\frac{1}{a}(by_1+c)\right|=\left|\frac{1}{a}(ax_1+by_1+c)\right|$$

$$\mathrm{AC}=\left|y_1+\frac{1}{b}(ax_1+c)\right|=\left|\frac{1}{b}(ax_1+by_1+c)\right|$$

であり，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(ax_1+by_1+c)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}(ax_1+by_1+c)^2$$

より

$$\mathrm{BC}=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{ab}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

である。

$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{DBA}$ であるから，$\mathrm{CA}:\mathrm{AD}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}\Leftrightarrow\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{BA}$

よって，

$$d=\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}}=\frac{\left|\dfrac{1}{ab}\right|\cdot(ax_1+by_1+c)^2}{\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{ab}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$a=0$ かつ $b\fallingdotseq 0$ のとき，つまり直線が x 軸に並行なとき，および $a\fallingdotseq 0$ かつ $b=0$ のとき，つまり直線が y 軸に並行なときについては，方法 2 と全く同じで成り立つ。

5　方法 4（正射影）

正射影の考え方は教科書にはないが，受験生はほとんど習っているのではないだろうか。簡単に説明すると，図 5 の状況のとき，$\mathrm{AH} = \mathrm{AP}\cos\theta$
$= \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \cdot 1 \cdot \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \cdot |\overrightarrow{e}| \cdot \cos\theta = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{e}$

ここで，$\overrightarrow{e}$ は直線 l の法線ベクトル $\overrightarrow{n} = (a,\ b)$（下記［補足］参照）に並行な単位ベクトルで，いま図 5 の向きにあるとしている。

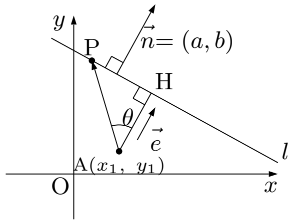

図 5: 正射影

$\overrightarrow{e}$ が図 5 と逆向きになっているとき，$\overrightarrow{e}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ' とすると $\theta' = \pi - \theta$ だから

$$\mathrm{AH} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \cdot |\overrightarrow{e}| \cdot \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| \cdot |\overrightarrow{e}| \cdot \cos(\pi - \theta') = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{e}$$

と表される。したがって $\overrightarrow{e}$ がどちらを向いていても，

$$\mathrm{AH} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{e}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{|\overrightarrow{n}|}$$

であり，この AH を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の正射影の長さという。

この知識を用いれば，点 A と直線 l の距離とは $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の正射影の長さそのものであり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x - x_1,\ y - y_1)$，$\overrightarrow{n} = (a,\ b)$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n} = a(x - x_1) + b(y - y_1) = ax + by - (ax_1 + by_1)$$

である。ここで，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は直線 l 上より $ax + by = -c$ が成り立ち，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n} = -c - (ax_1 + by_1) = -(ax_1 + by_1 + c)$$

である。よって，

$$d = \mathrm{AH} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

※［補足］法線ベクトル $\overrightarrow{n} = (a,\ b)$ について

図 6 のように，直線 l の法線ベクトルを $\overrightarrow{n} = (a,\ b)$ とすると，直線 l 上の定点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ と直線上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ で作られるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{n}$ と常に直交するから

$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \Leftrightarrow (a,\ b) \cdot (x - x_0,\ y - y_0) = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$

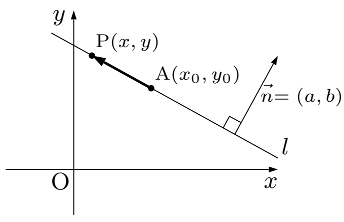

図 6: 法線ベクトル

が成り立つ。ここで $-(ax_0 + by_0) = c$ とおくと $ax + by + c = 0$ が得られ，これが直線の一般形である。したがって一般形における x，y の係数 a，b は直線の法線ベクトルの x，y 成分を意味している。

6　方法 5（1 次変換）

方法 1 と同様に，直線 l と点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$ 並行移動させる（図 7）。また，法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とする。これによって点 A は原点 O にうつり，直線 $l : ax+by+c=0$ は直線 $l' : a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$ にうつる。次にこの直線 l' を原点を中心に $-\theta$ 回転させてできる直線を L とすると，L は y 軸に並行な直線である（図 8）。

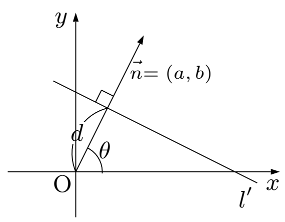

図 7: 平行移動

直線 l' 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が，直線 L 上の点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ にうつるとし，$-\theta$ 回転を表す 1 次変換の行列を X とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

である。ここで X^{-1} は θ 回転を表す行列だから $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である。よって

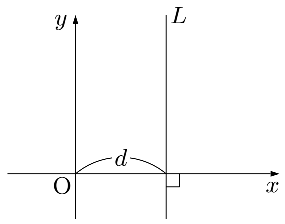

図 8: $-\theta$ 回転

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つ。

$(x,\ y)$ は直線 l' 上の点であるから，これを l' に代入して

$$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta + x_1) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_1) + c = 0$$

であり，

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)x' + (b\cos\theta - a\sin\theta)y' + ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑥$$

となる。

さて，ここで $(\cos\theta,\ \sin\theta) = \overrightarrow{e}$ とおくと，$\overrightarrow{e}$ は単位ベクトルであり，$\overrightarrow{e} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{n}$ であるから（図 9），

$$(\cos\theta,\ \sin\theta) \mathbin{/\!/} (a,b) \Leftrightarrow b\cos\theta - a\sin\theta = 0$$

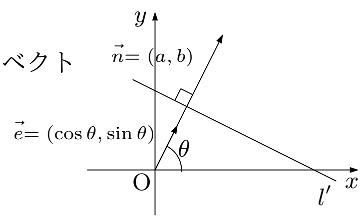

図 9: 単位ベクトル

である。一方，

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{e} = \pm|\overrightarrow{n}| = \pm\sqrt{a^2+b^2}$$

である。

よって，⑥は

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot x' + ax_1 + by_1 + c = 0 \Leftrightarrow x' = \pm\frac{-(ax_1+by_1+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となり，

$$d = |x'| = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる。

7　おわりに

点と直線の距離公式の形の持つ意味は，方法 4 の正射影がズバリそのものであることが分かる。ベクトルをひと通り学んだ受験生には入試問題を解くつもりで理解させてやるとよいのではないだろうか。方法 5 も 1 次変換の練習問題として面白いと思う。

しかし，どちらも数学 II の教科書の証明には使えないので，現行の教科書の証明より分かりやすいものとして方法 1〜方法 3 はいかがなものであろうか？

方法 2，方法 3 では平面図形の知識を用いて示したが，図形を用いた解法は際限なくあると思われる。