

2円の引き算について（『根軸』の一解釈）

鎌田 風平

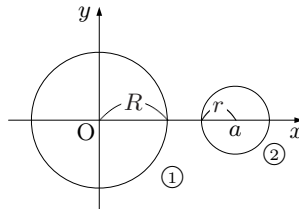
1 はじめに

2円が2点で交わる時、その2円の方程式の引き算をすると交点を通る直線の方程式（根軸）が得られることはよく知られているが、2円が共有点を持たないとき引き算で得られる直線がどんな意味を持つのかよく質問を受ける。そこで2円が接する場合も含め引き算で得られる直線の意味について考えてみる。

2 2円の設定

中心の異なる2円の位置関係は、平行移動と回転により

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \quad (R > 0) & \dots\dots\dots ① \\ (x - a)^2 + y^2 = r^2 \quad (r > 0) & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$



に移すことができる。また、 $a > 0$, $R \geq r$ として一般性は崩れない。

3 ① - ② の意味

① - ② は①, ②の方程式を連立することに他ならず

$$(ア) \begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \text{ かつ } \Leftrightarrow (イ) \begin{cases} ① - ② \\ ① \end{cases} \text{ かつ } \Leftrightarrow (ウ) \begin{cases} ① - ② \\ ② \end{cases} \text{ かつ } \Leftrightarrow (エ) \begin{cases} ① + ② \\ ① - ② \end{cases} \text{ かつ } \Leftrightarrow \dots$$

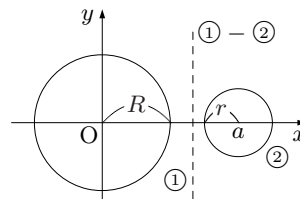
などは全て同値変形である。ここで① - ②より

$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} \left(= \frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a} \right)$$

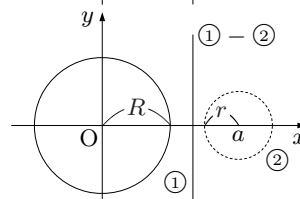
が得られるが、これは2円の中心の中心点 $(\frac{a}{2}, 0)$ より x 軸方向に $\frac{R^2 - r^2}{2a}$ だけずれた x 軸上の点 $(\frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a}, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線である。

(ア)~(ウ)の図形的な意味は

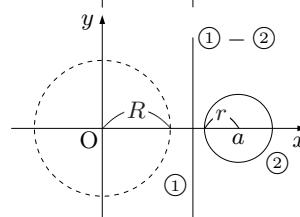
- (ア) ①, ②の2円を連立し共有点を調べること。



- (イ) ①-②の直線と①の円の共有点を調べること。



- (ウ) ①-②の直線と②の円の共有点を調べること。



でありこれらが全て同値な計算となる。

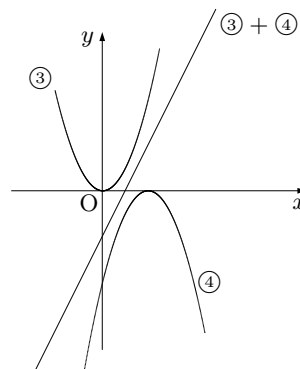
つまり、計算者が①, ②の2円の連立を意図して①-②の計算を実施したとき、①-②の直線(①と②が共有点を持つ)が存在する)と①または②の円との共有点を求める計算をしているのと区別のつけようがないのである。

類似のことは実は常に言える。例えば共有点を持たない2つの2次関数

$$\begin{cases} y = x^2 & \dots\dots\dots ③ \\ y = -(x-2)^2 & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

を連立すると

$$x^2 = -(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \dots\dots\dots ⑤$$



であり、共有点を持たないから $D/4 = 1 - 2 < 0$ である。

ここで (オ) $\begin{cases} ③ \\ かつ \\ ④ \end{cases} \Leftrightarrow (カ) \begin{cases} ③+④ \\ かつ \\ ③ \end{cases}$ は同値変形であり、

③+④で得られる直線 $y = 2x - 2$ と③を連立すると

$$x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

と⑤と同じ方程式になる。つまり計算者が③と④の共有点を調べようと連立したとき((オ)), ③+④の直線(実際に存在する)と③の共有点を求める計算((カ))を行っているのと区別のつけようがない。

結局 2 円の方程式の引き算の結果、2 円の共有点の有無とは無関係に直線 (①-②) が存在し、図形的に 2 円を連立しているのか、直線と一方の円を連立しているのか計算では区別できないのと同様に、2 つの放物線においても共有点の有無とは無関係に直線 (③+④) が存在し、図形的に 2 つの放物線を連立しているのか、直線と一方の放物線を連立しているのか計算では区別できないのである。

4 共有点の状況

(イ) の連立式を解いて直線と円の位置関係を調べ、それが (ア) の連立式の解 (2 円の位置関係) と同値の意味を持つことを確認する。

(イ) より $x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}$ (① - ②) を $x^2 + y^2 = R^2 \dots$ ① に代入する。

$$\left(\frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}\right)^2 + y^2 = R^2$$

$$\begin{aligned} \therefore y^2 &= R^2 - \left(\frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2 R^2 - (a^2 + R^2 - r^2)^2}{4a^2} \\ &= \frac{\{2aR + (a^2 + R^2 - r^2)\}\{2aR - (a^2 + R^2 - r^2)\}}{4a^2} \\ &= \frac{\{(a + R)^2 - r^2\}\{r^2 - (a - R)^2\}}{4a^2} \\ &= \frac{(a + R + r)(a + R - r)(r + a - R)(r - a + R)}{4a^2} \end{aligned}$$

(i) 接するとき

$$y^2 = \frac{(a + R + r)(a + R - r)(r + a - R)(r - a + R)}{4a^2} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

において、 $a + R + r > 0$, $a + R - r > 0$ ($\because a > 0, R \geq r$) だから y^2 の符号は $(r + a - R)(r - a + R)$ で決まる。

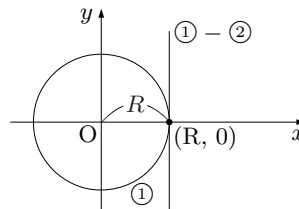
$$\textcircled{6} \text{ が重解をもつ} \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow (r + a - R)(r - a + R) = 0$$

$$\therefore a = R \pm r \quad (a > 0 \text{ より } a = R - r \text{ のとき } R > r)$$

よって、円と直線が接するとき接点は

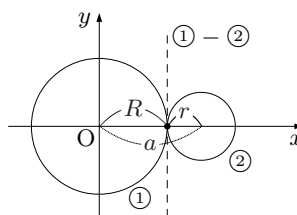
$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} = \frac{(R \pm r)^2 + R^2 - r^2}{2(R \pm r)} = \frac{R(R \pm r)}{R \pm r} = R \quad (\text{複号同順})$$

より $(R, 0)$ である。

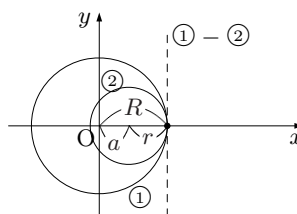


このとき連立式 (ア) の意味を考えてみると、

- $a = R + r$ のとき
右図のように外接している。



- $a = R - r$ のとき
右図のように内接している。



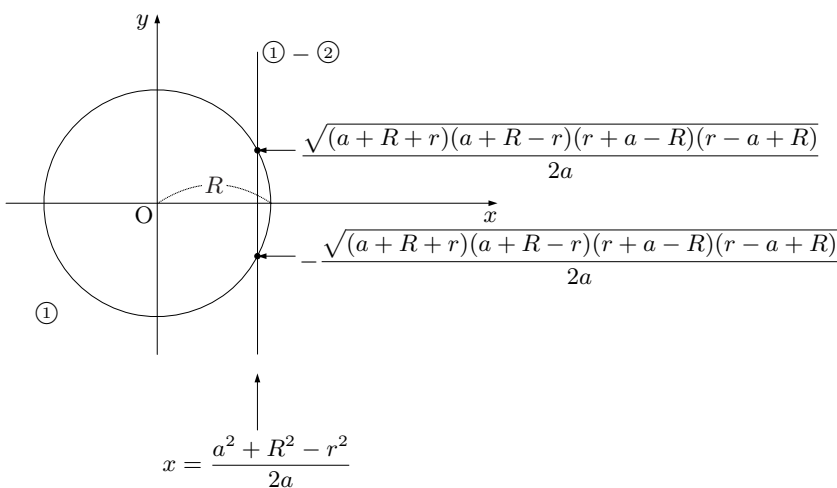
であり、2円が点 $(R, 0)$ で外接または内接している状態である。

(ii) 2点で交わる時

$$(\text{⑥が異なる2実解をもつ}) \Leftrightarrow y^2 > 0 \Leftrightarrow (r + a - R)(r - a + R) > 0$$

$$\Leftrightarrow \{a - (R - r)\}\{a - (R + r)\} < 0 \therefore R - r < a < R + r$$

また⑥の解は $y = \pm \frac{\sqrt{(a + R + r)(a + R - r)(r + a - R)(r - a + R)}}{2a}$ である。



このとき、共有点の x 座標は

$R = r$ のとき

$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} = \frac{a}{2} \text{ で } R - r < a < R + r \Leftrightarrow 0 < a < 2R \text{ より } 0 < x < R \text{ であり}$$

$R > r$ のとき

$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a} \text{ で } a \text{ が } R - r < a < R + r \text{ を動くとき}$$

$$\frac{dx}{da} = \frac{1}{2} - \frac{R^2 - r^2}{2a^2} = \frac{a^2 - (R^2 - r^2)}{2a^2} = \frac{(a + \sqrt{R^2 - r^2})(a - \sqrt{R^2 - r^2})}{2a^2}$$

$$R - r < \sqrt{R^2 - r^2} < R + r \text{ より}$$

a	$R - r$	\dots	$\sqrt{R^2 - r^2}$	\dots	$R + r$
x'	\nearrow	$-$	0	$+$	\nearrow
x	\nearrow	\searrow	極小	\nearrow	\nearrow

$$a = \sqrt{R^2 - r^2} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

かつ $\lim_{a \rightarrow R+r-0} x = R, \lim_{a \rightarrow R-r+0} x = R$ であるから $\sqrt{R^2 - r^2} \leq x < R$ である。

結局円と直線が2点で交わるときの共有点の x 座標のとりうる範囲は

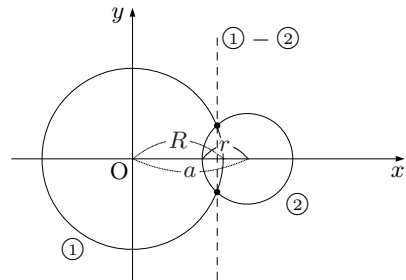
$$\begin{cases} 0 < x < R & (R = r) \\ \sqrt{R^2 - r^2} \leq x < R & (R > r) \end{cases}$$

となる。

またこの状況を連立式 (ア) の2円の関係で考えると

$$R - r < a < R + r$$

であるから右図のようになり、2円は2点で交わる。

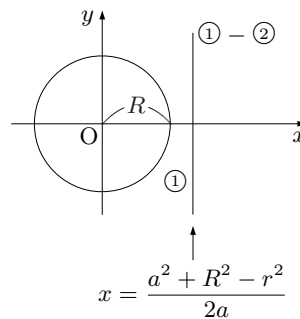


(iii) 共有点をもたないとき

$$(\textcircled{c} \text{が実数解をもたない}) \Leftrightarrow y^2 < 0 \Leftrightarrow (r + a - R)(r - a + R) < 0$$

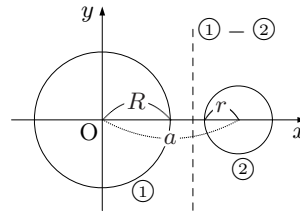
$$\Leftrightarrow \{a - (R - r)\}\{a - (R + r)\} > 0 \therefore a < R - r, R + r < a$$

(ii) の増減表よりこのとき直線の x 座標は $x > R$ となり、右に離れている。

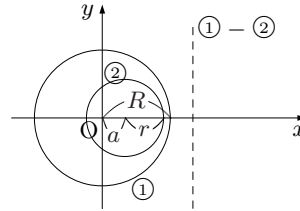


このとき連立式 (ア) での意味を考えてみると、

- $a > R + r$ のとき
右図のように外側に離れている。



- $a < R - r$ のとき
右図のように円①が円②を内包している。



となり、確かに 2 円は離れている。

5 まとめ

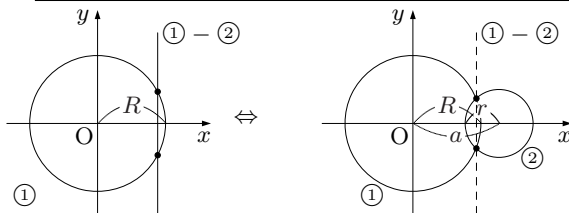
2 円の引き算 $① - ②$ を実行すると、2 円 ①, ② の交点を通る直線が求まるわけではなく、 x 軸に垂直な直線

$$x = \frac{a^2 + R^2 - r^2}{2a} \left(= \frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a} \right)$$

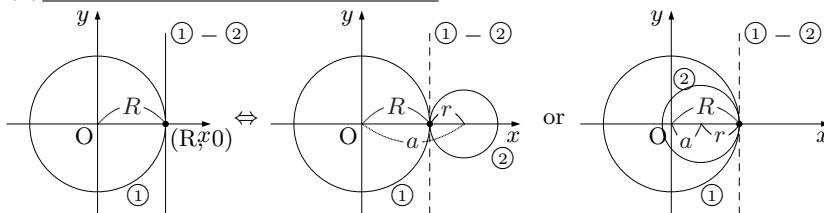
が算出され、この直線は 2 円の共有点の有無に無関係に存在する。この直線とどちらか一方の円との共有点の関係が、2 円 ①かつ②の共有点の関係に同値となる直線である。

したがって、この直線はどちらか一方の円と一緒に考えて初めて意味をもち、2 円の共有点とは

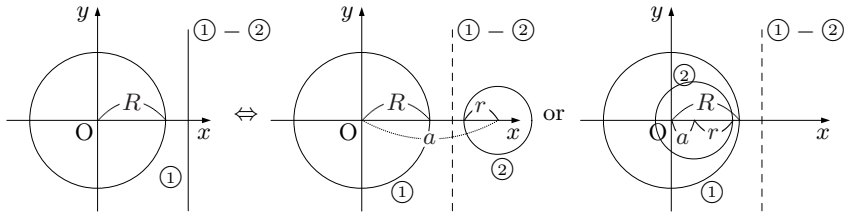
(i) 円と直線が 2 点で交わる \Leftrightarrow 2 円が 2 点で交わる



(ii) 円と直線が接する \Leftrightarrow 2 円が接する



(Iii) 円と直線が共有点をもたない \Leftrightarrow 2円が共有点をもたない



と対応の関係にあるものである。

したがって、①-②の直線は一方の円との共有点の関係において初めて意味をもつ存在なのだが、2円が2点で交わる時には結果的に2円の交点を通る直線となるため、便宜的に使用していると考えべきである。

6 参考

直線①-②は一般に『根軸』と呼ばれ、2円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡である。

実際、直線①-②上の点Pから2円に引いた接線の長さPS, PTが等しいことをみてみよう。2円が外側に離れている場合を例にとるが、他の場合も同様に調べられる。

$\triangle OPS$ において

$$PS^2 = OP^2 - R^2$$

また $\triangle OPH$ において

$$OP^2 = OH^2 + PH^2$$

より

$$PS^2 = (OH^2 + PH^2) - R^2$$

同様に $\triangle APT$, $\triangle APH$ より

$$PT^2 = (AH^2 + PH^2) - r^2$$

ここで $\frac{R^2 - r^2}{2a} = \alpha$ とおくと

$$OH = \frac{a}{2} + \alpha, \quad AH = OA - OH = a - \left(\frac{a}{2} + \alpha\right) = \frac{a}{2} - \alpha \quad x = \frac{a}{2} + \frac{R^2 - r^2}{2a}$$

だから

$$\begin{aligned} \therefore PS^2 - PT^2 &= OH^2 - AH^2 - (R^2 - r^2) \\ &= \left(\frac{a}{2} + \alpha\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - \alpha\right)^2 - (R^2 - r^2) \\ &= 2a\alpha - (R^2 - r^2) \\ &= (R^2 - r^2) - (R^2 - r^2) = 0 \end{aligned}$$

である。よって $PS = PT$

